

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de primaria en el área de Matemáticas¹

Why multiply in cross? Initial training of primary teachers in the Mathematics area

Pablo Flores Martínez

<p>Resumen</p>	<p>El algoritmo de la división de fracciones es de los más sencillos de aprender y aplicar, pero los problemas que lo requieren son difíciles de enunciar y resolver. Justificar este algoritmo requiere comprender los problemas de fraccionamiento, de fracción de fracción, y las operaciones inversas. Un profesor de matemáticas que enseñe la división de fracciones tiene que manejar con soltura estos conceptos para que sus alumnos la aprendan de manera significativa y funcional. En la Universidad de Granada, España, llevamos a cabo la formación inicial de profesores de primaria, en el área de Matemáticas, teniendo como uno de los objetivos que los estudiantes para profesor comprendan los contenidos matemáticos del nivel educativo que impartirán, entre ellos la división de fracciones, y puedan diseñar buenas unidades didácticas para lograr su aprendizaje. En este trabajo se describe el proceso formativo que estamos llevando a cabo desde el Departamento de Didáctica de la Matemática dentro del plan de formación. Para ello describimos las dimensiones sobre las que se aposenta el curso, el papel <i>profesional del docente</i>, el <i>análisis didáctico</i> y el <i>conocimiento matemático para la enseñanza</i>.</p> <p>Palabras clave: Profesores de Matemáticas, Formación inicial, Plan de formación</p>
<p>Abstract</p>	<p>The fraction division algorithm is one of the simplest to learn and apply, but the problems in which you can use it are difficult to formulate and solve. Justifying this algorithm requires</p>

¹ Trabajo realizado en el Proyecto EDU2012-33030, Proceso de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación, del Ministerio de Economía y competitividad, España.

	<p>understanding the problems of fractionation, fraction fraction, and inverse operations. A math teacher who teaches the division of fractions has to handle these concepts with ease so that his students learn it in a meaningful and functional way. At the University of Granada, Spain, we carry out the initial training of Primary School teachers, in Mathematics area, having as one of the aims that students for teacher understand the mathematical contents of the educational level that they will teach, among them the division of fractions, and can design good didactic units to achieve their learning. This paper describes the training process that we are carrying out from the Department of Mathematics Didactics within the training plan. We describe the dimensions on which this course takes placed, the professional role of the teacher, the didactic analysis and the mathematical knowledge for teaching.</p> <p>Key words: Teachers of Mathematics, Initial training, Training plan</p>
<p>Resumo</p>	<p>O algoritmo da divisão de frações é um dos mais simples de aprender e aplicar, mas os problemas que o envolvem são difíceis de enunciar e resolver. Justificar este algoritmo implica a compreensão dos problemas de fracionamento, de fração de uma fração e as operações inversas. Um professor de matemática que ensina a divisão de frações tem que lidar, com desenvoltura, com estes conceitos para que os seus alunos a aprendam de forma significativa e funcional. Na Universidade de Granada, em Espanha, realizamos formação inicial de professores do ensino fundamental, na área de Matemática, tendo como um dos objetivos que os futuros professores compreendam os conteúdos matemáticos do nível de escolaridade em que irão ministrar, de entre eles a divisão. de frações, e possam construir unidades didáticas eficazes para alcançar a sua aprendizagem. Neste trabalho, descreve-se o processo de formação que estamos a desenvolver no Departamento de Didática da Matemática, enquadrado no plano de formação. Para isso, descrevemos as dimensões em que o curso se apoia, as atribuições profissionais do professor, a análise didática e o conhecimento matemático para ensinar.</p> <p>Palavras chave: Professores de Matemática, Treinamento inicial, Plano de treinamento</p>

Introducción

El algoritmo clásico de la división de fracciones consiste en "multiplicar en cruz", numerador del dividendo por denominador del divisor y denominador del dividendo por el numerador del divisor. Hay incluso muchas reglas mnemotécnicas que facilitan su recuerdo. No requiere preparar las fracciones antes de dividir las, y el resultado es directamente la fracción cociente. Esto hace que este procedimiento sea muy simple y fácil de aprender. Pero ¿se puede identificar dividir fracciones con realizar el algoritmo? ¿No sería más formativo saber identificar qué problemas requieren dividir fracciones, qué significa el resultado, a qué unidad se refiere, etc.?

Como veremos, los problemas que requieren dividir números racionales resultan complejos, pues rompen la identificación tradicional de la división con el reparto. Por tanto, resultan difíciles de enunciar, y por supuesto de resolver.

Para poder enseñar la división de fracciones de una manera fundamentada, el profesor de matemáticas tiene que comprender este algoritmo, lo que requiere profundizar en el significado de fracción y los tipos de problemas multiplicativos de números racionales.

En esta conferencia describimos el plan formativo que estamos llevando a cabo en la Universidad de Granada, España, en la formación inicial de profesores de primaria, en el área de Matemáticas, en el que arrancamos de considerar que los estudiantes para profesor tienen que comprender los contenidos matemáticos de primaria, entre ellos la división de fracciones, para diseñar su enseñanza de estos contenidos. Utilizamos para esta descripción dimensiones habituales en la línea de investigación sobre formación de profesores, , el papel *profesional del docente* y el *conocimiento matemático para la enseñanza*, pero también una herramienta que nos permite dar una intención funcional a la formación, el análisis didáctico.

El plan de formación pretende formar docentes de matemáticas que sean profesionales, por lo que analizamos sus funciones, prestando especial interés al diseño e implementación de unidades didácticas. La preparación sistemática del diseño e implementación se afrontan desde el *análisis didáctico* de los contenidos matemáticos, compuesto del análisis del *contenido*, *cognitivo*, de *instrucción* y de *actuación*. El primero explora el significado del contenido, o sea, conceptos, formas de representación y fenómenos relacionados con él. El segundo examina las oportunidades y limitaciones de aprendizaje. El análisis de instrucción profundiza sobre tareas y secuencias de enseñanza. Cada uno de estos análisis corresponde con uno de los cursos del proceso formativo. Los cursos afrontan el *conocimiento profesional del profesor de matemáticas*, centrándose en el conocimiento matemático para la enseñanza. El análisis de contenido exige y ayuda a que los estudiantes desarrollen conocimiento común y especializado de cada contenido matemático, mientras que el análisis cognitivo y de instrucción requieren desarrollar

conocimiento matemático de la enseñanza y el aprendizaje, así como conocimiento curricular. Realizar el análisis didáctico de la división de fracciones prepara al docente para diseñar e implementar la enseñanza para que los alumnos la aprendan de manera significativa.

El escrito arranca de mostrar la complejidad de la división de fracciones, para expresar la finalidad del proceso formativo, lograr que los estudiantes comprendan los contenidos matemáticos que tienen que enseñar (la división de fracciones, en este caso, como ejemplo), para lo que proponemos que los estudiantes realicen análisis didáctico de dichos contenidos. Examinar las partes del análisis didáctico nos permite describir las asignaturas que constituyen el plan de formación.

1. Complejidad de la división de fracciones

La operación $1 : \frac{2}{5}$, acepta, al menos, dos formas de obtener el resultado:

a) $1 = \frac{5}{5}$ $\left| \begin{array}{r} 2 \\ 5 \end{array} \right.$ 2 cociente y $\frac{1}{5}$ resto
 $\frac{1}{5}$ 2

b) $1 : \frac{2}{5} = 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ 2 cociente y $\frac{1}{2}$ resto

Obtener resultados diferentes obliga a justificar cuál es el adecuado. Para ello hay diversas estrategias.

La más inmediata parte de la práctica. No es frecuente la división de racionales con el algoritmo de Euclides de la división entera. Surge un primer interrogante (1) ¿Es posible emplear este algoritmo para la división de racionales?

Más interesante es buscar el significado de los cálculos relacionándolos con problemas reales. División se identifica con reparto. Repartimos 1 (una tableta de chocolate, muy socorrida para las fracciones), entre $2/5$ de.. ¿qué? ¡Ah! Entre $2/5$ de los habitantes de la casa. Ya está. En casa somos 5 personas, por lo tanto el problema es: “*si repartimos chocolate entre (2/5 de 5 es 2) 2 personas ¿cuánto toca a cada una?...* Pues a $1/2$. ¡Esto

² En España el algoritmo de la división entera se realiza de esta forma, colocando el divisor en una “caja”, a la misma altura que el dividendo, y debajo del divisor se coloca el cociente. El resto aparece debajo del dividendo, tras hacer las restas sucesivas, según se van añadiendo cifras al cociente. En otros países este algoritmo es diferente.

no tiene nada que ver con las operaciones anteriores! En un reparto necesitamos saber entre cuántos se reparte, y esto siempre será un entero. No nos vale para $1: \frac{2}{5}$. Surge una segunda pregunta (2) ¿Qué tipo de problemas requieren dividir números racionales?

El reparto anterior utiliza los siguientes datos: 1 tableta de chocolate, 2 personas, y el resultado es (media) $\frac{1}{2}$ tableta, o sea, $\frac{1}{2}$ tableta por persona. Los problemas de reparto usan datos de tres magnitudes: tabletas, personas y tabletas/persona, lo que llamamos *tasa*. En este caso la incógnita es la porción, la tasa, lo que corresponde a cada persona. Podemos cambiar la incógnita de lugar, por ejemplo, situarla en el divisor y surge el siguiente problema:

Repartimos una tableta de chocolate dándole a cada uno una porción de $\frac{2}{5}$ de tableta ¿cuántas personas reciben ración?

Este problema corresponde con el enunciado $1: \frac{2}{5}$. ¿Cuál de las soluciones planteadas es más adecuada? En las condiciones del problema, tenemos para dar la porción a dos personas y sobra ... ¿ $\frac{1}{5}$? ¿o sobra $\frac{1}{2}$? Surge ahí una tercera cuestión: (3) ¿Qué significan los datos y el resultado de la división de fracciones?

Al tener un problema, podemos resolverlo empíricamente, o al menos con representaciones icónicas (Figura 1).

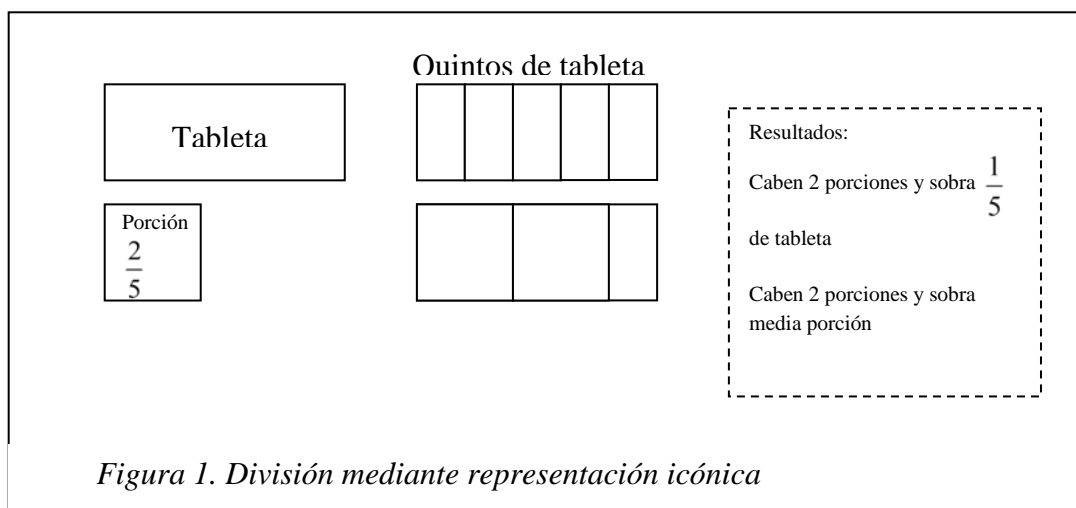


Figura 1. División mediante representación icónica

Con este preámbulo mostramos que una operación tan fácil de realizar, como la división de fracciones, puede crearnos complicaciones, si no la dominamos con profundidad. De hecho, el procedimiento de dividir fracciones es relativamente sencillo, consiste en “multiplicar en cruz”. Pero, y esta es la cuarta pregunta (4) ¿Por qué se multiplican en cruz las fracciones para dividir las?

Este es el título de esta conferencia. Y es que esta sencilla pregunta nos ayuda a pensar qué conocimiento tiene que tener un profesor para enseñar la división de fracciones, de manera que los alumnos entiendan lo que están haciendo, y no solo aprendan a resolver operaciones sin sentido. Hemos tomado esta pregunta para ir examinando qué aspectos tenemos que cubrir en la formación inicial de profesores de matemáticas de educación primaria (niños entre 6 y 12 años), para que puedan llegar a enseñar unas matemáticas en las que no quepan “la multiplicación en cruz”, sino que se de más importancia a comprender lo que se está haciendo.

A continuación, vamos a basarnos en este razonamiento para mostrar el plan de formación de matemática de profesores de Primaria, que se está poniendo en práctica en la Universidad de Granada, empleando las cuestiones que vamos planteando, para ejemplificar procesos y contenidos. Añadimos nuevas como las siguientes:

(5) ¿Qué tienen que aprender los alumnos de primaria de la división de fracciones?

(6) ¿Cómo enseñar la división de fracciones para que la entiendan los alumnos?

(7) ¿Cómo evaluar este aprendizaje?

2. "Sólo el que comprende puede enseñar"

Con esta frase responde Lee Shulman, pedagogo americano, a otra frase perversa que seguro hemos escuchado alguna vez: “*El que sabe, hace. El que no sabe, enseña*”. Shulman (1989) resume en ella sus apreciaciones sobre el conocimiento del profesor.

¿Cómo hacer que los futuros maestros *comprendan* (las matemáticas, la división de fracciones), para poder enseñarla a sus alumnos?

En la Universidad de Granada hemos partido de que el proceso formativo tiene que dirigirse a formar un profesor profesional, que comprenda las matemáticas que va a enseñar. Por tanto, el currículo de la formación matemática para los futuros maestros tiene que:

- Favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos, profundizando hasta poder responder a las cuestiones planteadas al principio de esta conferencia.
- Poner al estudiante para profesor en contacto con lecturas y resultados alcanzados en las didácticas de los temas matemáticos.
- Hacer que lo refleje profundizando en el significado de los contenidos matemáticos (como la división de fracciones), para comprenderla y para diseñar sesiones de clase encaminadas a lograr su aprendizaje.

3. El Análisis didáctico

En el grupo de investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico, FQ193, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, se ha aposentado el Análisis Didáctico como una herramienta que combina la comprensión con la profesionalización. Arranca de los trabajos de Luis Rico (1997a y b), quien establece cuatro dimensiones del currículo (dimensión cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social), que se manifiestan en diferentes niveles de desarrollo del currículo (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

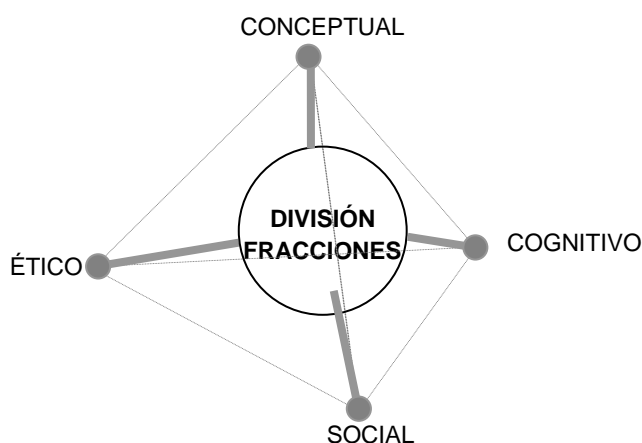


Figura 2. Análisis curricular de un contenido matemático

Un nivel especialmente importante para el desempeño profesional del profesor, es el que corresponde al diseño e implementación de la enseñanza de un contenido. Para llevar a cabo esta tarea, Rico (1997a) define cuatro análisis sobre la enseñanza del contenido, correspondientes a las dimensiones anteriores. El currículo refleja un aspecto cultural/conceptual que se concreta en el contenido matemático a enseñar, para lo que el profesor necesita realizar un *análisis del contenido*. Pero además tiene que preocuparse del alumno, sus posibilidades y obstáculos de aprendizaje, realizando un *análisis cognitivo*. La actuación del profesor refleja la dimensión ética o formativa, que requiere *analizar la instrucción*, para determinar tareas que procuren el aprendizaje pretendido. Por último, el profesor tiene que dar cuenta a la sociedad de su enseñanza, realizando el *análisis de actuación*, para valorar tanto los logros como el proceso.

El *contenido* matemático queda definido para Rico (1997a) mediante el triángulo semántico de Frege, cuyos vértices son, referencia, signo y sentido. En el primer vértice (referencia), se sitúa la *estructura conceptual*, que requiere examinar los conceptos y procedimientos matemáticos, tanto actuales como en otros momentos de la historia de las matemáticas (*evolución histórica*). El vértice signo está ocupado por las representaciones empleadas para expresar el contenido y los modelos que pueden emplearse para materializar los conceptos. El sentido de un contenido lo marcan los fenómenos que se

organizan a través de dicho contenido, sus aplicaciones prácticas y los contextos en que se ponen en marcha. Por tanto el *análisis de contenido* abarca el estudio de las *estructuras conceptuales, evolución histórica, sistemas de representación y modelos, y análisis fenomenológico*.

El profesor planifica el aprendizaje del alumno a partir de la dimensión *cognitiva* del contenido. Examinando las cualidades cognitivas del alumno en relación al contenido, llega a establecer las finalidades de aprendizaje, formuladas en forma de objetivos y competencias, así como las limitaciones, considerando qué errores y dificultades se detectan habitualmente en el aprendizaje del tema matemático. Expectativas y limitaciones de aprendizaje permiten construir secuencias de capacidades que los alumnos tienen que aprender a poner en juego para resolver las tareas y llevar a cabo los aprendizajes previstos.

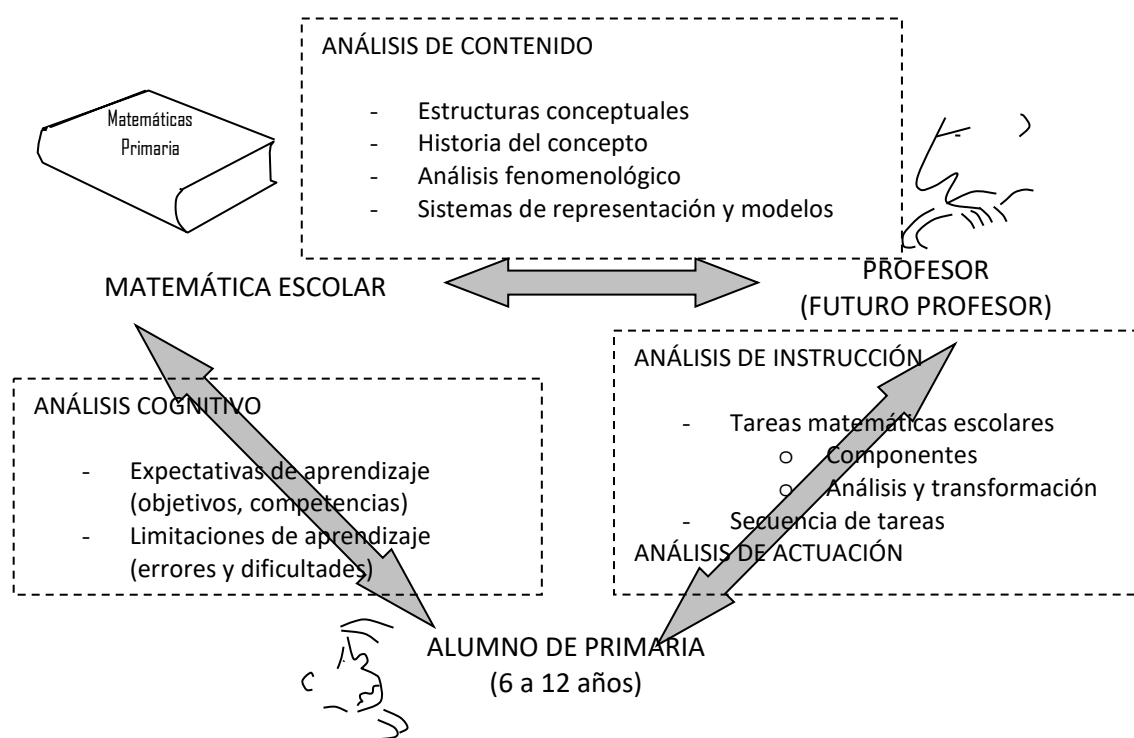


Figura 3. Análisis Didáctico en el proceso de enseñanza/aprendizaje matemático

La profesión docente es una tarea práctica, en el sentido aristotélico. La acción es tan importante como los fines. La dimensión ética o formativa debe llevar al profesor a examinar qué tareas, medios, recursos y prácticas, son las más adecuadas para alcanzar los objetivos de aprendizaje. El análisis de *instrucción* se centra tanto en buscar tareas matemáticas escolares, como en diseñar secuencias de tareas.

Prever instrumentos, criterios y formas de poner en práctica la evaluación, de forma que se aprecien logros en forma de competencias, da la ocasión al profesor de cerrar el proceso formativo de manera coherente, con lo que se constituye en el análisis de *actuación*.

4. Formar profesores profesionales que comprendan

Para describir un plan de formación hay que clarificar, dos componentes al menos, el proceso formativo y el su contenido, el conocimiento en que se forma. El genial Francesco Tonucci ha dibujado una viñeta en la que enfatiza le papel ambiguo del profesor en formación, en el centro de un sistema doble, ya que siempre tiene que tener de referencia su actuación en el sistema didáctico de la educación Primaria. Aprovechamos esta viñeta para diseñar el diagrama de formación (figura 4).

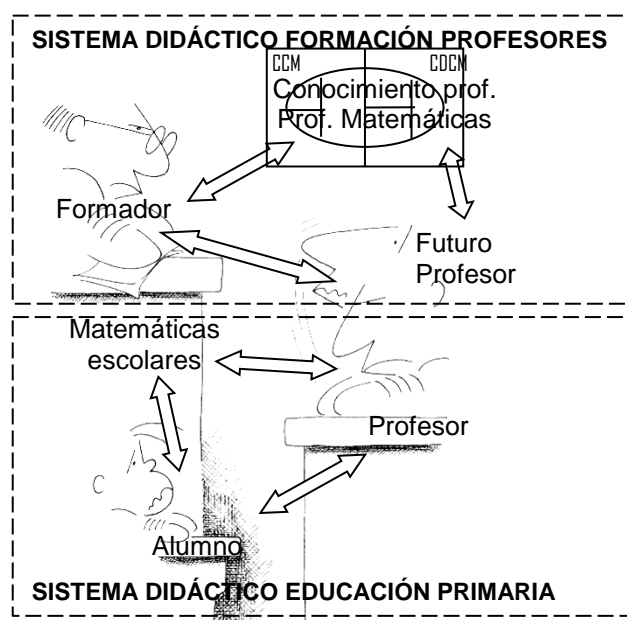


Figura 4. Sistemas didácticos implicados en Formación de Profesores de Matemáticas

Establecer dos premisas (comprender y profesionalizar), mediante una herramienta (el análisis didáctico), ha dado lugar a un proceso formativo que se ubica en la tradición profesional de formación Zeichner (1983), concibiendo al maestro de educación primaria como un educador con intención instructiva, que pueda lograr que el alumno de 6 a 12 años desarrolle competencias básicas relacionadas con las matemáticas, sobre las que poder continuar su formación como ciudadano para afrontar los retos de la sociedad actual.

Se trata de un plan de formación profesional, que parte del conocimiento matemático de la educación primaria, concibiéndolo como problemático, no completamente definido

(Zeichner, 1983), y completado con conocimiento de Didáctica de la Matemática, concebida como instrumento para el desempeño profesional, con lo que interesa más ahondar en sus problemas que en sus resultados.

El contenido de los cursos de formación matemática de los futuros maestros, se centra, fundamentalmente, en “conocimiento profesional del profesor de matemáticas”, entendido tal como lo hace Deborah Ball y su equipo de la Universidad de Michigan (Hill et al., 2008), el Conocimiento del Profesor de Matemáticas (Mathematical Knowledge Teaching). En este modelo se distinguen dos componentes, la primera de conocimiento matemático, que tiene tres subdominios (conocimiento común de las matemáticas, conocimiento especializado de las matemáticas y conocimiento del horizonte matemático) y la segunda el conocimiento didáctico del contenido matemático, con otros tres (conocimiento de las matemáticas y la enseñanza, de las matemáticas y los alumnos, y el conocimiento curricular).

Tabla 1. Créditos de la titulación del Grado de Educación Primaria, Universidad Granada

	ASIGNATURA	Créditos	
		Obligatorios	Optativos
General	Psicología	18	9
	Didáctica y Pedagogía	36	9
	Sociología de la educación	6	
Didáctica Específica Instrumental	Didáctica de la Matemática	22	6
	Didáctica de la Lengua Española y Literatura	21	18
	Didáctica Ciencias Sociales	15	6
	Didáctica de las Ciencias Experimentales	15	6
	Didáctica de Artes Visuales y Plásticas	9	6
Didáctica específica especialidad	Idioma Extranjero y su Didáctica	6	12+12
	Didáctica Educación Física	6	24
	Educación Musical	6	24
	MATERIAS OPTATIVAS	Elegir 30 créditos de las ofertadas	
Profesional	Práctica pedagógica	44	
	Trabajo FIN DE GRADO	6	
	Total	240 créditos en 8 semestres	

La formación inicial de profesores de Primaria, en la Universidad de Granada, abarca 4 cursos (8 semestres), durante los cuales se imparten asignaturas por áreas educativas generales (Didáctica y Organización Escolar, Psicología de la Educación y Evolutiva,

Sociología Pedagogía y MIDE), asignaturas impartidas por áreas de didácticas específicas instrumentales (Didáctica de la Lengua española, de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales, de las Ciencias Experimentales y de la Formación artística), y didácticas específicas de especialidad (Didáctica de lengua extranjera, de la Educación Física y de la Música). La tabla 1, refleja la cantidad de créditos que comporta cada una de estas áreas.

La formación matemática se cubre de manera obligatoria, por 3 asignaturas: Bases Matemáticas, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y Diseño y Desarrollo del Currículo, siempre de Matemáticas en Educación Primaria. (Figura 5), y una optativa.

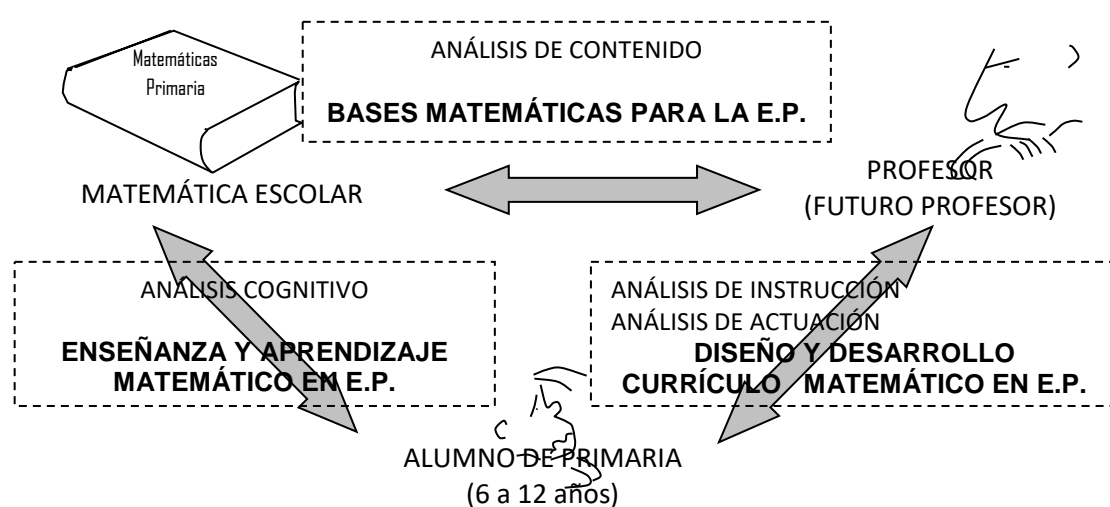


Figura 5. Análisis Didáctico en el Plan de Formación de Maestros

Bases Matemáticas para la Educación Primaria

Para poder diseñar e implementar enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria, el maestro necesita conocimientos matemáticos, especialmente de los contenidos que se imparten en dicho ciclo educativo. Determinar qué tipo de conocimiento se requiere para este desempeño ha sido objeto de reflexiones y trabajos compartidos por los componentes del departamento de Didáctica de la Matemática de la UGR, desde hace más de 10 años, en los cuales se han llevado a cabo 7 proyectos de innovación docente, y formado parte de tres proyectos de investigación. La decisión sobre qué conocimiento matemático requiere el futuro maestro se ha fundamentado en el Análisis Didáctico es decir, el conocimiento matemático resultante de realizar un análisis del contenido de los núcleos temáticos de las Matemáticas de Primaria.

El estudio de esta asignatura debe lograr que los estudiantes respondan a las cuestiones 1, 2, 3 y 4 planteadas en la introducción de esta conferencia, sobre la división de fracciones.

Decidir sobre el empleo del algoritmo de Euclides en la división de racionales (1), requiere profundizar en su significado. Estimulemos a que los estudiantes utilicen situaciones próximas, por ejemplo, empleando calculadoras didácticas que incluyan la división entera (tecla \longdiv). Cuando se introduce en la calculadora la secuencia del problema planteado ($\langle 1 \rangle$, $\langle \longdiv \rangle$, $\langle 2/5 \rangle$), se observa que al colocar el divisor, aparece *Error*. La calculadora no puede hacer esta división entera. Podríamos concluir que no es posible aplicar el algoritmo de la división entera a los racionales, pero hemos mostrado que la operación era correcta y corresponde a una acción real (ver cuántas veces 1 contiene a $2/5$). Nuevo dilema. El análisis de contenido de la división de fracciones tiene que llevar al estudiante a tener más argumentos. Parece que la división, al igual que la resta, no está definida formalmente como operación en \mathbb{Q} , pese a que ambas son operaciones cerradas en este Conjunto. Ambas son operaciones inversas de la multiplicación y adición, respectivamente. La división es la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor ¿Qué es entonces la división entera? Para comprenderla hay que ir a los números naturales, estudiar la relación de múltiplo y divisor, comprender que la división en \mathbb{N} sólo es posible cuando el dividendo es mayor que el divisor y además cuando el dividendo es múltiplo del divisor. Si no es múltiplo, podemos obtener múltiplos próximos, lo que permite obtener cocientes por defecto, que son los que empleamos para definir y realizar la división entera. En \mathbb{Q} , ¿se puede hablar de fracciones múltiplos de otras fracciones? Todo este estudio lleva a determinar estructuras conceptuales que subyacen a la división de fracciones, relacionándola con multiplicación y con la divisibilidad. Estudios históricos sobre las fracciones y sus problemas podrían ayudarnos a comprender mejor esta idea de división (Contreras, 2004). Estas profundizaciones se abordan desde el análisis de contenido, profundizando en sus tres vértices y relacionándolos entre sí, con lo que se amplía el conocimiento común sobre la división de fracciones.

Una forma de resolver el dilema sobre los restos ha sido plantear situaciones reales de división de fracciones. Pero ¿qué tipos de problemas pueden plantearse? (cuestión 2). Buscar problemas de división requiere examinar qué es multiplicar fracciones, arrancando de problemas multiplicativos con naturales. El trabajo de Greer (1992) sobre problemas multiplicativos, nos permite ver cuáles aceptan que los términos sean números racionales. El análisis fenomenológico del contenido, en el vértice “sentido” del triángulo semántico de Frege, atiende a conocimiento especializado para la enseñanza, ya que interesa a los profesores que enseñan la división de fracciones.

Este análisis fenomenológico nos permite clarificar los términos de los problemas multiplicativos, apreciando la existencia de la tasa en los problemas de proporcionalidad directa. Además, en los problemas multiplicativos racionales, cada factor se relaciona con un todo o unidad particular, pues la proporcionalidad directa se refiere a correspondencia

entre dos magnitudes (tableta de chocolate y tamaño de porción). El análisis de contenido nos aclara estos términos, tanto en un conocimiento común (saber identificar unidad de referencia de cada fracción), como para comprender su importancia cara a resolver los problemas multiplicativos (conocimiento especializado). Con estos conocimientos responderían los estudiantes a la cuestión 3.

Para justificar por qué multiplicar en cruz (cuestión 3), hay que examinar la correspondencia entre acciones concretas y acciones simbólicas en la proporcionalidad (figura 6). Pasar de la correspondencia, 1 ración frente a $\frac{2}{5}$ de la tableta, a buscar la cantidad de raciones para 1 tableta, lo que exige llevar el segundo término a la unidad mediante operaciones multiplicativas, y aplicar las mismas operaciones en el otro conjunto. Finalmente se aprecia que la resolución requiere realizar la fracción operador inversa de la del divisor, abarcando nuevo conocimiento especializado para la enseñanza, fruto del análisis de contenido.

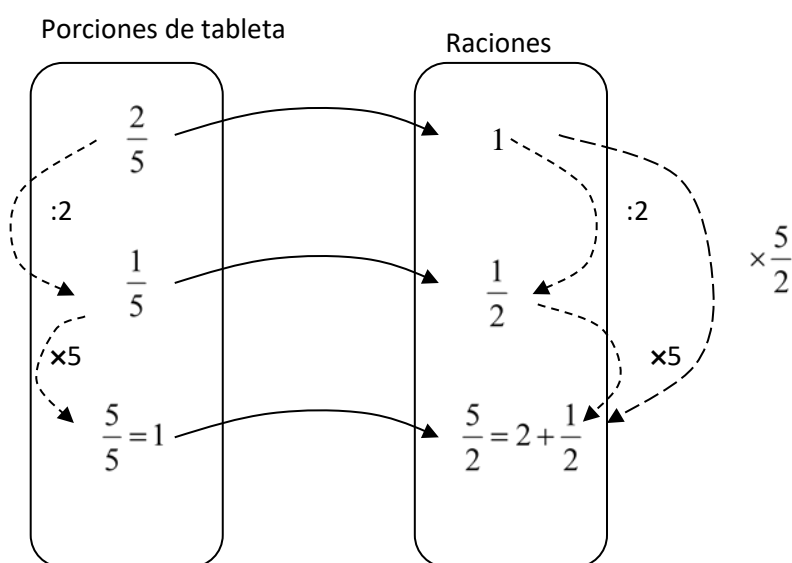


Figura 6. Justificación de multiplicar por el inverso para dividir fracciones

Con estas cuestiones hemos mostrado el objeto de esta asignatura: Bases Matemáticas para el maestro de Educación Primaria. Se trata de conocimiento matemático común suficiente para desempeñarse en situaciones como la planteada al principio, y manejar el conocimiento especializado en forma de “sentidos de las operaciones”, “formas de representarlas”, “magnitudes a las que se refieren los datos”, “acciones que se realizan con ellos”, “correspondencias entre acciones con elementos y operaciones con representaciones simbólicas”, etc. Esta asignatura pretende, pues, cubrir el primer criterio que hemos planteado: sólo el que comprende puede enseñar matemáticas.

Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria

Los estudiantes que comprenden el contenido tienen mayores oportunidades para enseñarlo, pero no basta con ello. Para completar la formación, las otras asignaturas de Matemáticas hacen que los futuros maestros se relacionen con la Didáctica de la Matemática, profundizando en el conocimiento didáctico del contenido matemático. La Didáctica de la Matemática ha llegado a consensuar un cuerpo de conocimiento específico, pero hay que reconocer que su origen y desarrollo obedecen más a la lógica de la investigación que a la de los profesores que están enseñando Matemáticas en la enseñanza obligatoria. Falta mucho para que la Didáctica de la Matemática atienda a las necesidades de los profesores en su trabajo, por lo que no podemos pretender formar maestros eruditos en un saber que los va a distanciar de sus pares, cuando se incorporen a la escuela.

Tomando en cuenta esta circunstancia, el proceso formativo en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, se hace más profesionalizador, con un contenido menos definido, más problemático. Trata de responder a cuestiones como ¿Qué debemos lograr que aprendan los alumnos de primaria? ¿Cómo podemos salvar sus dificultades y errores? Son cuestiones que afrontamos en la asignatura “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas”, cuyo foco de atención es la profundización en aspectos cognitivos del aprendizaje matemático. Esta asignatura se propone una intención más práctica, sin pretender ser exhaustivos. Las herramientas, en forma de textos sobre didáctica de cada contenido, están al servicio de los estudiantes, quienes tienen que localizarlos, darle sentido y aplicarlos a la enseñanza y aprendizaje de temas concretos. Otras asignaturas generales (psicología del aprendizaje, psicología evolutiva y de la educación, etc.), suministran referentes que ayudan a comprender los resultados que encontrarán en textos de didáctica del tema que corresponde a cada equipo de trabajo.

El resultado de este curso debe ser un análisis cognitivo en profundidad de un tema de matemáticas de Primaria (como “Unidad, decena y centena”, para 7 años, “Los polígonos”, para 9 años, etc.). Los futuros maestros, trabajando en grupos, tienen que buscar fuentes de información sobre la didáctica del tema que les corresponde, examinar qué objetivos de enseñanza pueden pretender en el curso o ciclo adecuado, y qué limitaciones (dificultades y errores), son más frecuentes para los alumnos. Este trabajo final, que se va completando a lo largo de las 18 semanas del semestre, cubrirá una parte del desempeño profesional para el que se están preparando. (En la figura 7 aparece el esquema de actuación con el tema ejemplo: la división de fracciones para niños de 11-12 años).

Esta asignatura se enfoca en el conocimiento profesional del profesor sobre las Matemáticas y los alumnos. Profundizando en ella podemos responder a la cuestión 5.

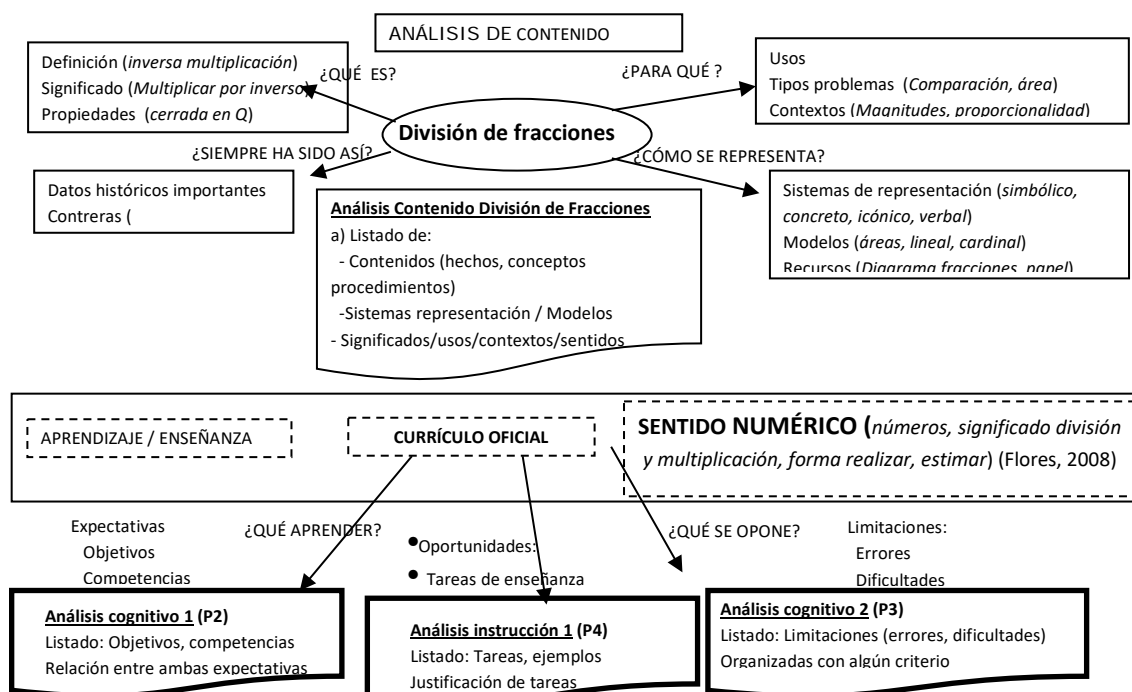


Figura 7. Esquema de actuación en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

¿Cómo conjugar la profundización en la didáctica de un tema con una visión más amplia sobre las didácticas de los demás temas? Este interrogante nos ha llevado a frecuentes debates entre los profesores, especialmente por que nuestras raíces se aposentan en tierra enciclopédica, en la que la enseñanza tiene que barrer todo lo que se sabe de un tema. Una solución de consenso ha tomado en cuenta la orientación actual de la enseñanza de las Matemáticas en los niveles obligatorios, en los que predomina pretensión funcional, es decir, encaminada a desarrollar competencias. Una manera de ver al niño como sujeto matemáticamente competente, es considerarlo como alguien que emplea las matemáticas “con sentido”. Esta idea de “sentido matemático” está inspirada en aportes recientes sobre “sentido numérico”, “sentido espacial”, “sentido de medida” y “sentido estocástico”. En esta asignatura se ha introducido un tema llamado “Sentido matemático”, que muestra esta orientación en el aprendizaje matemático, cubriendo las componentes de cada uno de estos sentidos, pero realzando la importancia de desarrollarlas de manera coordinada. Esto hace que en la parte práctica de este curso se realicen análisis de hasta qué punto se logra desarrollar sentido matemático resolviendo tareas matemáticas escolares, y se utilicen estas componentes para decidir qué objetivos de aprendizaje se deben pretender. Entender que para manejar la división de fracciones con sentido hay que atender tanto al concepto y la representación de los números racionales, como al significado de las operaciones y los procesos de obtención de resultados, lleva a enfatizar objetivos que

abarquen todos estos campos. Por ello, los objetivos de aprendizaje de la división de fracciones pueden ser los expresados en la tabla 2.

Tabla 2: *Objetivos de la división de fracciones en Educación Primaria*

Que los alumnos:
- enuncien frases que expresen comparaciones multiplicativas de fracciones
- expresen esta comparación en forma simbólica
- traduzcan una expresión simbólica de división mediante un problema de comparación,
- resuelvan de manera manipulativa situaciones de comparación multiplicativa de fracciones

Igualmente, dificultades y errores posibles en el aprendizaje de la división de fracciones aparecen en la tabla 3, con lo que se responde a la cuestión 5 (Flores, 2008).

Tabla 3: *Dificultades y errores en el aprendizaje de la división de fracciones*

Dificultades	Errores
Identificar situaciones de división de fracciones	Realizan cálculo simbólico, sin identificar significado de fracción cociente No identifican operación correspondiente a un problema de comparación o de área
Considerar fracción como par de números naturales	Separan la división en división de numeradores y denominadores, sin relacionar cocientes entre sí
Identificar unidad de cada fracción	No identifican resultado de división en relación al problema planteado

Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria

Una vez comprendido el contenido y examinado los objetivos de aprendizaje, se pasa a estudiar cómo enseñarlo. Para ello se emplean los análisis realizados en cursos anteriores, dándoles una nueva vuelta de tuerca, que consiste en apreciar las cualidades educativas que tienen los recursos didácticos, así como la forma de llevar a cabo una enseñanza constructivista, siguiendo las ideas de asignaturas generales (Didáctica General, Psicología de la enseñanza, etc.).


Para responder a la cuestión 6 (¿Cómo enseñar la división de fracciones?) hay que haber respondido a varias de las cuestiones anteriores, realizando el análisis de contenido, el cognitivo y disponiendo de una visión constructivista de la enseñanza. Distinguir tareas matemáticas escolares para enseñar la división de fracciones, identificar en ellas sus elementos, percibir si promueven que el alumno ponga en juego sus conocimientos anteriores, si le lleva a realizar acciones con varias formas de representar las fracciones y las operaciones, si le obliga a explicar a otros los procedimientos ejecutados, a mostrar su lógica y relación con el problema planteado (que tiene que estar bien seleccionado), requiere entender ideas como “enseñanza significativa”, “resolución de problemas”, “comprensión de un concepto”, etc.

En esta asignatura los estudiantes tienen que planificar una unidad didáctica sobre un tema matemático específico de primaria. Para ello deben llevar a cabo los dos análisis realizados en cursos anteriores. El análisis de contenido emplea como referentes libros de Matemáticas para maestros. El análisis cognitivo utiliza textos específicos de didáctica del bloque de contenido que le corresponda.


Posteriormente deben buscar tareas matemáticas escolares, desmenuzarlas para apreciar sus cualidades educativas, analizarlas en relación a las teorías del aprendizaje propuesto, y secuenciarlas para facilitar que los alumnos lleven a cabo la secuencia de aprendizaje adecuado a sus objetivos. Requiere poner en juego y comenzar a familiarizarse con el conocimiento Didáctico del contenido matemático, concretamente del conocimiento de Matemáticas y enseñanza, del conocimiento curricular, ya que, como en las asignaturas anteriores, el estudiante para maestro tiene que examinar los documentos oficiales, tanto nacionales como de otros lugares para ubicar su responsabilidad profesional.

Un ejemplo de tarea que facilita el aprendizaje de la división de fracciones es la expresada en la figura 8.

Tarea matemática



a) Utilizando la Tabla de Fracciones y el puzzle de fracciones, podemos ver que “ $\frac{1}{2}$ es el doble de $\frac{1}{4}$ ”. Completa las siguientes frases empleando estos materiales.



$\frac{1}{2}$ contiene _____ veces a $\frac{1}{8}$ _____ está contenido 2 veces en $\frac{1}{3}$

Si hago la mitad de $\frac{1}{4}$ obtengo _____ La cuarta parte del doble de $\frac{1}{3}$ es _____

b) “ $\frac{1}{2}$ es el doble de $\frac{1}{4}$ ” se puede expresar simbólicamente de las siguientes formas:

$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$ $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Expresa las frases anteriores en forma simbólica, empleando operaciones con fracciones

c) Busca nuevas comparaciones multiplicativas de fracciones, empleando los materiales didácticos, y exprésalas en forma verbal y simbólica.

Figura 8: Tarea matemática escolar para el aprendizaje de la división de fracciones

Para completar la unidad didáctica, los alumnos tienen que planificar cómo van a evaluar el aprendizaje, interpretando los criterios que se proponen en los documentos oficiales, y diseñando instrumentos de evaluación. Con ello realizan un análisis de actuación, que

pueden apoyar en las experiencias de enseñanza que han llevado a cabo en la práctica pedagógica, que se desarrolla en el semestre anterior (figura 9).

Es importante realzar el papel destacado que juegan los créditos prácticos de formación, que ocupan, al menos, el 50% de la carga de créditos total. Entendemos por preparación práctica la que hace que los estudiantes sean protagonistas de su trabajo. Para desarrollarla, se descomponen cada grupo (de unos 70 alumnos), en tres partes de unos 23 alumnos, que trabajan en equipos de 4, para resolver de manera personal, tareas relacionadas con cada uno de los cursos.

Fruto de la experiencia de formación se han elaborado varios libros para apoyarla³. Igualmente se han publicado los trabajos prácticos, especialmente de Bases Matemáticas⁴. Durante su implementación hemos llevado a cabo 6 proyectos de innovación docente, lo que ha supuesto muchas horas de compartir, revisar y poner al día, el diseño de las asignaturas. Fruto de ello es la elaboración de 3 artículos de revista⁵, y de la presentación en varios congresos⁶.

La aplicación del proceso formativo ha sido objeto de una primera evaluación, especialmente de sus créditos prácticos, mediante una tesis doctoral⁷, y va a ser objeto de otra revisión en el mismo formato.

5. Conclusiones

A lo largo de esta conferencia hemos querido mostrar un proceso formativo que atiende a la formación inicial de profesores de niños de 6 a 12 años, en el área de Matemáticas, que se está aplicando en la Universidad de Granada, España. En este proceso se han

³ Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Flores, P. y Rico, L. (Eds.) (2015). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria*. Madrid, Pirámide.

Godino, J. D. (Dir.) (2004a). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Y *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.

⁴ Flores, P. y Segovia, I. (2004). *Prácticas de matemáticas para maestros*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

⁵ Lupiáñez, J.L., Molina, M., Flores, P. & Segovia, I. (2007). Mathematics Primary Teacher Training in the Context of the European Higher Education Area. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*. Vol. 2, 2007. <http://www.SocialSciences-Journal.com>.

Segovia, I., Lupiáñez, J.L. y Flores, P. (2006). Formación práctica en educación matemática del profesor de primaria para la Europa del siglo XXI. (177-208). En Benítez, J.L., G^a Berbén, Ana B., Justicia, F. y De la Fuente, J. (Eds.). *La Universidad ante el reto del Espacio Europeo de Educación Superior: Investigaciones recientes*. Madrid, EOS. ISBN: 84-9727-195-5.

Ruiz, F., Molina, M., Lupiáñez, J.L., Segovia, I. & Flores, P. (2009). Mathematics Primary Teachers Training at the University of Granada. An Adaptation to the EHEA. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), ISSN: 1696-2095.

⁶ Flores, P., Segovia, I., Lupiáñez, J.L., Molina, M. (2007). *Innovación en la formación matemática de maestros*. Jornadas de Innovación Docente Universitaria en el Marco del EEES. Granada, 16 Junio 2007.

Molina, M., Lupiáñez, J.L., Segovia, I., Flores, P. (2008). *Mathematics for Prospective Primary Teachers. A Pilot Experience for Adapting to the European Higher Education Area*. ICMI 11. México, Julio 2008.

Molina, M., Segovia, I., Flores, P. (2010). Una experiencia de innovación docente dirigida a los alumnos repetidores en la formación de maestros en Didáctica de la Matemática. *Comunicación en CiDd: II Congrés Internacional de Didàctiques 2010: L'activitat del docent: Intervenció, Innovació, Investigació*. Girona, 3 a 6 de febrero.

⁷ Cecilia, L.M. (2007). *Estudio de un programa de prácticas de matemáticas para la formación inicial de maestros*. Tesis de Maestría. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

conjugado la intención de que los estudiantes comprendan los contenidos matemáticos del ciclo educativo que impartirán, desde una perspectiva que favorezca su profesionalización.

Se aprecia que dicho modelo abarca todos los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, según el modelo MKT (Hill et al., 2008). En el primer curso se atiende a la formación matemática de los estudiantes, promoviendo una profundización en el significado de los contenidos en aritmética, medida, geometría y estadística. El conocimiento común, que ha formado parte de la formación anterior de estos estudiantes, se ve reforzado por la búsqueda de significados de los contenidos trabajados, profundizando en el conocimiento especializado. La poca alusión al conocimiento del horizonte matemático, la reconocemos como una debilidad que tenemos que abordar. Los cursos de Didáctica de las Matemáticas cubren todas las componentes del conocimiento didáctico del contenido matemático, aunque la propuesta formativa comienza con el análisis cognitivo, que lleva a profundizar en el conocimiento del alumno. Posteriormente, el diseño de unidades acarrea una revisión sobre el conocimiento de las Matemáticas y la enseñanza. Durante toda la formación se atiende al currículo de Matemáticas de la Educación Primaria, con lo que el conocimiento del currículo está presente en todo el plan formativo.

El proceso formativo da mucho protagonismo a los estudiantes, quienes tienen que ir realizando los diferentes análisis que componen la herramienta idiosincrática de nuestro plan. Esto da lugar a que la formación en Didáctica de la Matemática no sea exhaustiva, concibiéndola más como herramientas que prepara para el desempeño profesional, que como contenido erudito.

Tal como hemos mostrado con la división de fracciones, el proceso formativo pretende generar hábitos para que los estudiantes puedan profundizar en el problema planteado en la introducción, para ir respondiendo a las cuestiones que surgieron en ella.

Que aprecien el interés del algoritmo de la división euclídea entre racionales, y le den sentido apoyándolo en problemas, percibiendo la ventaja que presenta para identificar claramente las magnitudes a las que se refieren las fracciones (1 y $\frac{1}{5}$ se refieren a la tableta, 2 a las raciones) (cuestión 1). Que lo relacionen con el algoritmo de la división racional, apreciando que el resultado es único ($\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, cantidad de porciones), y que $\frac{1}{2}$ es media ración, que, por tanto corresponde a $\frac{1}{5}$ de tableta (cuestión 2). Que identifiquen problemas de división de fracción como situaciones de comparación (cuántas veces cabe

$\frac{2}{5}$ de tableta en 1 tableta), o de áreas (cuestión 3). Que observen que si se establece una relación entre las raciones y la tableta, a una ración corresponde $\frac{2}{5}$ de tableta, por lo que para llegar a considerar las raciones de 1 tableta habrá que dividir por 2, para obtener cuánto corresponde a $\frac{1}{5}$ de tableta, y multiplicar por 5, para ver cuántas raciones corresponden a la tableta completa ($\frac{5}{5}$), con lo que aparece la multiplicación en cruz (cuestión 4, todas ellas en la formación matemática de los maestros).

Pero también el proceso ayudará a mostrar que en Educación Primaria nos contentamos con que los alumnos sean capaces de realizar divisiones de fracciones en situaciones sencillas, en las que se aprecien relaciones multiplicativas entre fracciones, con lo que las expresiones simbólicas que corresponden a estas operaciones provendrán de estas relaciones, y no tendrán que ir más allá (cuestión 5). Así, por ejemplo, las tareas de enseñanza de la división de fracciones de este ciclo educativo se limitarán a que los alumnos manipulen representaciones de fracciones y establezcan relaciones multiplicativas, sin llegar a construir los elementos formales que les corresponden, como la multiplicación en cruz (cuestión 6).

Como se aprecia, el proceso formativo está muy centrado en el contenido matemático, aunque tome en consideración apreciaciones sobre su enseñanza y aprendizaje, siempre basadas en resultados suficientemente afianzados en la investigación en la didáctica de la aritmética, para el caso de la división de fracciones.

Esperamos que los estudiantes comprendan la división de fracciones, aunque sea para apreciar que no es un contenido específico de la Educación Primaria. Que perciban que la división de fracciones en este ciclo se limita a expresar relaciones de comparación que pueden obtener los alumnos mediante actuaciones concretas. Que dejen el algoritmo (tan fácil, pero tan perverso) de multiplicar en cruz para cuando los alumnos estén suficientemente maduros para trabajar con la operatoria. Y que basen todas estas apreciaciones en su comprensión y en las informaciones didácticas que lo han investigado. Con esta breve idea se resume el proceso. Si a los propios formadores se les plantean dificultades de comprensión de la división de fracciones (mediante la multiplicación en cruz), ¿para qué enseñar a multiplicar en cruz antes de tiempo?

Referencias bibliográficas

- Contreras, M. (2004). La división de fracciones: un algoritmo misterioso. Comunicación en *VI Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana*. Societat "Al-Khwarizmi".
- Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Épsilon Vol. 25(3)*. 27-40.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouw (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Rico, L. (1997a). *Bases teóricas del currículum de matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997b). *La enseñanza de las matemáticas en educación secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Rico, L., Lupiáñez, J.L y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Zeichner, K. (1983). Alternative paradigms of teacher education. *Journal of Teacher Education*, Vol XXXIV, No 3, pp. 3-9.

Pablo Flores Martínez

Doctor en Didáctica de la Matemática y Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, España, licenciado en Ciencias de la Educación por la UNED. Intereses investigadores principales, caracterizar conocimiento y la labor profesional del profesor de matemáticas y profundizar sobre recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas, especialmente los recursos evocadores, como el humor y los materiales manipulativos. Experiencia profesional como profesor de matemáticas de secundaria, desde 1990 profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España, miembro del grupo de investigación Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico.

direcciones: pflores@ugr.es, <http://www.ugr.es/~pflores/>, <https://fqm193.ugr.es/>