

Videoconferencias previas

Modelo de enseñanza de fracciones en México

Dra (c). Carolina Rubí Real Ortega

El concepto de número racional

Su complejidad se vincula con sus diferentes interpretaciones y usos, lo cual ha sido considerado como la génesis de las dificultades de los alumnos (Real y Figueras, 2016).

Kieren (1976) sugirió siete diferentes interpretaciones: fracciones, decimales, pares ordenados, medidas, cocientes, operadores y razones. En 1988, este investigador distinguió cuatro subconstructos de los números racionales: medida, cociente, razón y operador.

Usiskin (1979) identificó diferentes usos de este tipo de números en situaciones de reparto, razones, proporciones, fórmulas matemáticas y ecuaciones. Lesh, Landau y Hamilton (1980) señalaron que el concepto de número racional es un grupo de su-constructos y procesos integrados, los cuales están relacionados a un amplio rango de conceptos básicos que aparecen en una variedad de situaciones problema.

Freudenthal (1983) sugirió diversos aspectos de fracción tales como: fracturador, comparador, operador fracturante o relación fracturante, relación razón, operador razón, transformador, mensurador, operador y fracción como número racional. Dichos aspectos aparecen en varios fenómenos que se organizan mediante el concepto de fracción.

En la década de los 90s, los resultados de dichas investigaciones influenciaron las reformas educativas de diferentes países con la finalidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos matemáticos. En México se incluyeron en el currículo diferentes significados de fracción tales como: medida, cociente, operador y razón.

A pesar de lo anterior, los alumnos de 3er. grado de secundaria continúan obteniendo bajos porcentajes de respuestas correctas en preguntas sobre fracciones de pruebas estandarizadas (INEE, 2009 & 2012; SEP, 2011). De acuerdo con Siegler y colaboradores (2012), es posible que esos estudiantes tengan un desempeño insatisfactorio en matemáticas en niveles educativos posteriores.

Debido a lo anterior, se diseñó un proyecto de investigación para caracterizar la estructura y organización del modelo de enseñanza de fracciones en la educación básica; analizar la interpretación de los programas de estudio que hacen los autores de los libros de texto, y caracterizar la efectividad del diseño en general.

Marco teórico

La teoría de los Modelos Teóricos Locales (Fillooy, Rojano, & Puig, 2008) se usó como un marco teórico y metodológico para organizar la investigación considerando sus cuatro componentes: Modelos de competencia formal, modelos de enseñanza, modelos de comunicación y modelos de procesos cognitivos.

Metodología

Para estructurar cada componente del Modelo Teórico Local, se definió una metodología específica.

- Los modelos de competencia formal se sustentan en la fenomenología didáctica de las fracciones (Freudenthal, 1983).
- Los modelos de enseñanza comprenden el análisis de los programas de estudio actuales para los diferentes niveles de educación básica y el de las actividades sobre fracciones incluidas en los libros de texto.

Modelos de competencia formal

Este componente se basa en el espécimen de fenomenología didáctica de las fracciones de Freudenthal (1983), el cual se reinterpretó identificando diferentes clases de fenómenos tales como: descripción y comparación de cantidades, valores de magnitud u objetos; división de sustancias medidas por magnitudes; distribución de cantidades; medición y números como parte de un sistema numérico. Diversas nociones y conceptos de fracciones y números racionales se identificaron en cada una de las cinco primeras clases de fenómenos y se ligaron con cinco procesos matemáticos: describir, comparar, dividir, distribuir y medir.

También se consideró una sexta clase de fenómenos, la cual se refiere a construcciones matemáticas de los números racionales.

Estos procesos matemáticos y construcciones fueron organizados y esquematizados en una red de nociones, conceptos y procesos de las fracciones y los números racionales (Real & Figueras, 2015). Esta red y su descripción se usaron para analizar y caracterizar el modelo de enseñanza de fracciones en la educación básica.

Modelos de enseñanza

Para Real y Figueras, un modelo de enseñanza de fracciones y números racionales se define como un conjunto de cinco elementos:

- i) Aspectos de la fracción, los fenómenos en los que aparecen y los procesos matemáticos considerados para su estudio;
- ii) Secuencias Didácticas que permiten experimentar matemáticamente diferentes aspectos de las fracciones para construir mejores objetos mentales desde el punto de vista de Freudenthal (1983, pp. 31-33);

- iii) Los diferentes lenguajes involucrados en las secuencias didácticas;
- iv) Las características necesarias para ser un usuario competente de los aspectos de la fracción involucrados en las secuencias didácticas en las que se incluye un uso apropiado de los diferentes lenguajes, en particular, de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) de las fracciones y los números racionales; y,
- v) Las relaciones inherentes entre todos estos elementos.

un valor
de magnitud en otro valor
de magnitud



4. En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

♦ En el recreo Luis, Carlos y Diana jugaban con 56 canicas. Cuando terminó el juego ellos se quedaron con las siguientes canicas:

Diana se quedó con la mitad de las canicas.

Luis tenía la mitad de canicas que Diana.

Carlos únicamente la mitad de canicas que Luis.

Dibuja en el recuadro la cantidad que tiene cada uno.



Luis



Carlos



Diana

2. En equipos, resuelvan el problema siguiente.

Raquel, Blanca y Mauricio tienen que formar bolsitas con la misma cantidad de chocolates para vender en el recreo, si sólo tienen 40 chocolates, ¿cómo deben repartirlos?

- ❖ Raquel propuso que se hicieran bolsitas con 10 chocolates cada una.
- ❖ Blanca propuso que en cada bolsita se pusieran 8 chocolates.
- ❖ Mauricio dijo que mejor pusieran 5 chocolates en cada bolsita.

¿Cuántas bolsitas ocuparían si hacen lo que propone Raquel? _____

¿Y cuántas, si hacen lo que dice Blanca? _____

Si los reparten como dice Mauricio, ¿cuántas bolsas necesitan? _____

¿Con cuál de las tres propuestas se necesitarían menos bolsitas? _____

¿Qué ocurre si hacen bolsas con 6 chocolates cada una? _____

¿Podrán llenar 10 bolsitas con el mismo número de chocolates cada una, sin que sobren chocolates? _____ Expliquen su respuesta _____

Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros equipos.

2do. elemento del modelo de enseñanza

En el modelo de enseñanza para los primeros tres grados de educación primaria, elementos de los cinco procesos matemáticos fueron tomados en cuenta, lo cual se puede considerar como una característica apropiada del modelo de enseñanza de fracciones. Los aspectos de la fracción que son estudiados son: descriptor, operador razón, relación razón, mensurador, fracturador y fracción como número.

No obstante, los autores de los libros de texto no consideraron algunas clases de fenómenos tales como: descripción de procesos cíclicos y periódicos; descripción de razones; comparación de cantidades y valores de magnitud a través de expresiones que se usan en el lenguaje cotidiano; comparaciones directas de objetos; y, la medición de magnitudes usando la recta numérica (Real & Figueras, 2015).

Se identificó una falta de continuidad del estudio de los diferentes aspectos de fracción. Por ejemplo, el estudio de la descripción de una cantidad por medio de otra cantidad se incluye en primer grado pero no se consideró en segundo y tercer grados.

El uso de fracciones para describir medidas es parte de las actividades de segundo y tercer grados. La fracción como operador razón que sirve para transformar una cantidad o valor de magnitud en otra cantidad o valor se enseña en primer y tercer grados pero en segundo no.

La fracción como relación razón se estudia sólo en tercer grado. Aunque se favorece la distribución de pequeñas cantidades en segundo y tercer grados, el uso de fracciones para describir el resultado de un proceso de reparto no se considera en segundo grado.

La medición de la capacidad de recipientes mediante el uso de unidades convencionales y no convencionales se enseña en segundo y tercer grados, mientras que la medición de masa de objetos sólo se considera en tercer grado. Cabe señalar que otro tipo de magnitudes vinculadas con fracciones no se exploraron.

Dividir el todo en partes iguales se estudia en tercer grado. Sin embargo, sólo en dos actividades los alumnos pueden experimentar el aspecto de la fracción como fracturador.

La partición del todo en partes iguales sólo se pide en algunas tareas, lo que constituye una debilidad del modelo de enseñanza ya que eso pueden conducir a una construcción inadecuada del objeto mental de fracción.

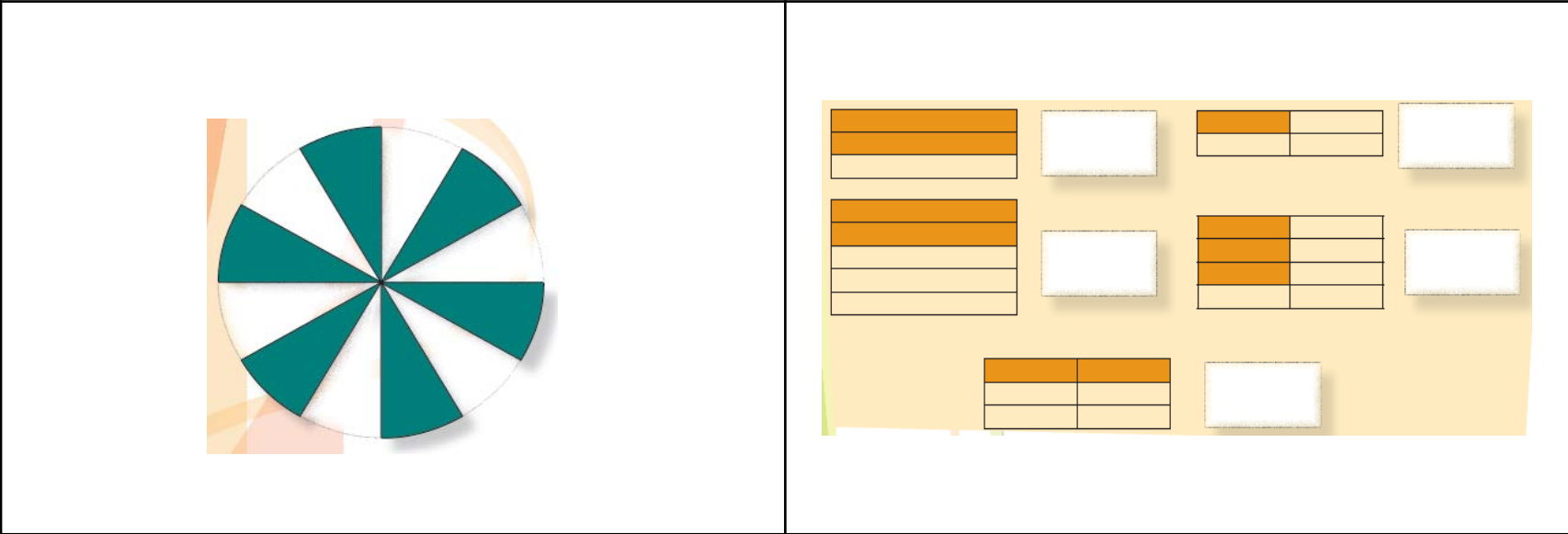
3er. elemento del modelo de enseñanza

Los diferentes lenguajes implicados en las secuencias didácticas de los modelos de enseñanza de fracciones son:

1. Lenguaje cotidiano
2. Lenguaje gráfico o códigos que se usan en diversas representaciones planas de figuras geométricas y sólidos, balanzas, diagramas o esquemas en el sentido de Streefland (1993)
3. Lenguaje gráfico de la recta numérica, y,
4. Lenguaje aritmético relacionado con los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) de las fracciones y los números racionales

En primer grado, se usan expresiones como: ‘Yo corté la mitad de manzanas que mi mamá y mi papá cortó el doble de peras que mi hermana’.

Para representar la relación entre la parte(s) y el todo, se usan círculos y rectángulos divididos en partes iguales las actividades del libro de tercer grado:



En actividades de tercer grado, se utilizan diagramas y esquemas para representar la masa de objetos y la equivalencia entre estos; y también se usan para visualizar el resultado de un proceso de distribución. Una introducción al SMS aritmético de las fracciones y los números racionales se lleva a cabo en tercer grado, la fracción primero aparece como una etiqueta asociada con la capacidad de una botella y después como la representación de una relación entre la(s) parte(s) y el todo.

Además la adición de fracciones unitarias se estudia en este grado.

Cabe señalar que en el modelo de enseñanza de fracciones de los primeros tres años de la escuela primaria no se incluyen representaciones de sólidos o balanza y que el uso de la recta numérica como un recurso para estudiar este tipo de números no se considera.

4to. elemento del modelo de enseñanza

Las características necesarias para ser un usuario competente de las fracciones de acuerdo con el modelo de enseñanza se relacionan con:

- un uso adecuado de los diferentes aspectos de la fracción para resolver problemas vinculados con fenómenos y procesos matemáticos que se estudian en las secuencias didácticas;
- el empleo flexible de los diversos lenguajes para representar las acciones que se llevan a cabo como parte de un proceso matemático y sus resultados; y,
- la utilización del SMS de las fracciones como símbolos matemáticos en distintos niveles de abstracción.

Tabla1. Cuadro comparativo de las competencias que se pretendes desarrollar en el ME

<i>Competencias de los programas de estudio</i>	<i>Competencias de los libros de texto de matemáticas</i>
Resolver problemas que implican determinar y usar la relación 'la mitad de'	Resolver problemas usando la relación 'la mitad de'
Resolver problemas mediante la adición y sustracción de fracciones de la forma $\frac{m}{2^n}$ cuando $1 \leq n \leq 3$	Resolver problemas y hacer ejercicios a través de la adición y sustracción de fracciones de la forma $\frac{m}{2^n}$ cuando $1 \leq n \leq 3$
Expresar verbalmente fracciones de la forma $\frac{m}{2^n}$ como medidas y como resultados del proceso de distribución	
Representar fracciones de la misma forma con símbolos	Representar el resultado de un proceso de distribución o una relación entre la(s) parte(s) y un todo continuo a través de una fracción
Identificar representaciones aditivas equivalentes con fracciones	
Comparar fracciones con el mismo numerador o denominador	Comparar fracciones para determinar cuál es mayor
Interpretar y representar fracciones usando diagramas o esquemas	
	Medir capacidad y masa usando unidad de medida convencional

Comentarios finales

Este tipo de caracterización del modelo de enseñanza de fracciones permite: 1) a los profesores a identificar las debilidades de las actividades de los libros de texto que usan y diseñar otras que les permitan superarlas;

2) a los maestros formadores de docentes revisitar el conocimiento matemático de los estudiantes así como estudiar la didáctica de las fracciones;

3) a los diseñadores de currículo y autores de libros de texto estructurar gradualmente la enseñanza de los contenidos matemáticos a lo largo de los grados de la educación básica; y,

4) a los investigadores de educación matemática les puede permitir construir un modelo de enseñanza alternativo de fracciones, a experimentar secuencias didácticas con los alumnos, a determinar cuáles aspectos de fracciones podrían enseñarse en cada grado y a evaluar el aprendizaje de los alumnos relacionado con la construcción de mejores objetos mentales y un uso competente de las fracciones.

References

- Castillo, P. D., García, V. M., Hernández, J. M., Hernández D. K., Perrusquía, E., León, M. A., Vázquez, E., Cantón, A. R., & Osorio, M. T. (2011). *Matemáticas. Primer grado*. México, D.F: SEP.
- Fillooy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York, NY: Springer.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. New York, NY: Kluwer Academic.
- Hernández, J. M., García, V. M., Perrusquía, E., León, M. Á., Castillo, P. D., Hernández, D. K., & Arredondo, C. (2011a). *Matemáticas. Tercer grado*. México, D.F: SEP.
- Hernández, J. M., García, V. M., Perrusquía, E., León, M. Á., Castillo, P. D., Vázquez, E., Cantón, A. R., & Osorio, M. T. (2011b). *Matemáticas. Segundo grado*. México, D.F: SEP.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2009). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Informe sobre los resultados de Excale 09, aplicación 2008* (INEE). Retrieved from <http://publicaciones.inee.edu.mx/detallePub.action?clave=P1D224>
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2012). *Estudio comparativo del aprendizaje de tercero de secundaria en México 2005-2008. Español y Matemáticas* (INEE). Retrieved from <http://www.inee.edu.mx/index.php/publicaciones-micrositio.pdf>

- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A., Lesh, & D. A., Bradbard (Eds.), *Number and Measurement. Papers from a Research Workshop* (pp. 101-144). Columbus, Ohio.
- Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number, Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 162-181). Reston VA: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.
- Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1980, July). *Rational number ideas and the role of representational systems*. Paper presented at the 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Berkeley, CA.
- Real, R. & Figueras, O. (2015). A network of notions, concepts and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of didactical phenomenology. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (pp. 346-353). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares. Características generales e Información de los Reactivos Aplicados para su Uso Pedagógico. Primer Grado de Secundaria 2011* (SEP). Retrieved from <http://www.dgep.sep.gob.mx:8080/apoyos/content.php?apli=2011>

- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 23 (7), 691-697.
- Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic Approach. In T. P., Carpenter, E., Fennema & T. A., Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp. 289-325). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Usiskin, Z. (1979). The Future of Fractions. *Arithmetic Teacher*, 26, 18-20.

Gracias por su atención ...